Théorème de Weierstrass (par convolution) (201, 203, 209, 228, 241)

Gourdon p. 224 et 284-286.

Thm : Toute fonction continue $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

démo : Soit $(\chi_n)_n$ une approximation de l'unité et soit f une fonction continue de $[a,b]$ et nulle en dehors.

Étape 1 : Convergence uniforme de $f * \chi_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur un compact et nulle en dehors, elle est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$, d'après le thm de Heine, donc

$$\exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit $M = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\int_{|t| \geq \delta} \chi_n(t)\,dt < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Comme $\int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)\,dt = 1$, et que $\chi_n \geq 0$, on a $\forall n \geq N$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f * \chi_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\chi_n(t)\,dt - \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t) f(x)\,dt \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|\, \chi_n(t)\,dt \\
&\leq \int_{|t| \geq \delta} |f(x-t) - f(x)|\, \chi_n(t)\,dt + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|\, \chi_n(t)\,dt \\
&\leq 2M\varepsilon + \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \chi_n(t)\,dt \\
&\leq 2M\varepsilon + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)\,dt = (2M+1)\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi $f * \chi_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Soit $a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,dt$ et $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^n}{a_n} & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étape 2 : p_n est une approximation de l'unité

- On remarque $\int_{\mathbb{R}} p_n(t)\,dt = \int_{-1}^{1} p_n(t)\,dt = 1$ par définition de a_n.

Par ailleurs $a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geqslant 2\int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \left[-\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

donc si $\alpha > 0$ et $\alpha < 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{|t|\geqslant\alpha} p_n(t)\,dt = \frac{2}{a_n}\int_\alpha^1 (1-t^2)^n dt \leq \frac{2}{a_n}(1-\alpha^2)^n \leq 2(n+1)(1-\alpha^2)^n.$$

et comme $|1-\alpha^2| < 1$, donc $\int_{|t|\geqslant\alpha} p_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

<u>Étape 3</u> : Soit f continue sur $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et nulle en dehors. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f * p_n$ est une fonction polynôme

On a $(f*p_n)(x) = (p_n * f)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} p_n(x-t)\, f(t)\,dt \quad \forall x \in I$

Lorsque $x \in I$ et $t \in I$ on a $|x-t| \leq 1$ donc $p_n(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n}$, en développant, on a

$p_n(x-t) = \sum_{k=0}^{2n} q_k(t)\, x^k$ En remplaçant dans $(f*p_n)(x)$ on obtient

$$\forall x \in I, \quad (f*p_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q_k(t)\, f(t)\,dt\right) x^k$$

D'où le résultat

- <u>Conclusion</u> : Par l'étape 1, $f*p_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur I.
  Donc f est limite uniforme sur I d'une suite de fonctions polynômes.

<u>Étape 4</u> : Passage de I à un intervalle quelconque.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, on considère $c < d \in \mathbb{R}$ avec $[a,b] \subset]c,d[$. On prolonge f par

- Une fonction affine sur $[c,a]$ valant 0 en c et $f(a)$ en a
- Une fonction affine sur $[b,d]$ valant 0 en d et $f(b)$ en b.

Donc f est continue sur $[c,d]$ et nulle en dehors.

Par un changement de coordonnées : $\varphi : I \longrightarrow [c,d]$
$x \longmapsto (d-c)x + \frac{c+d}{2}$

$f : [c,d] \to \mathbb{C}$ $\quad f\circ\varphi : I \to \mathbb{C}$

On obtient que $f\circ\varphi$ est limite uniforme d'une suite de polynômes Ψ_n par les étapes
donc f est limite uniforme de la suite $\Psi_n \circ \varphi^{-1}$ qui est bien une suite de polynômes
car φ^{-1} est affine.